Całka potrójna – zastosowania geometryczne

Zastosowania geometryczne całki potrójnej

Objętość bryły

Objętość bryły V można obliczyć korzystając z następującego wzoru:

$$|V| = \iiint\limits_V dxdydz\,. \tag{9}$$

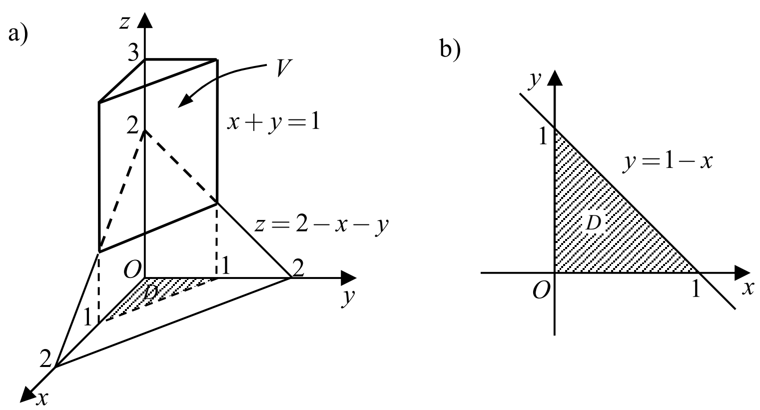
Przykład 5. Korzystając z całki potrójnej obliczyć objętość:

a) obszaru V ograniczonego płaszczyznami: $x=0$, $y=0$, $x+y=1$, $x+y+z=2$, $z=3$,

b) obszaru V ograniczonego powierzchniami: $z=x^2+y^2$, $z=2-\sqrt{x^2+y^2}$.

Rozwiązanie.

a) Obszar V (rys. 9a) od dołu jest ograniczony płaszczyzną $x+y+z=2$ (przecinającą osie układu współrzędnych w punktach: $(2,0,0)$, $(0,2,0)$, $(0,0,2)$), od góry płaszczyzną $z=3$, a po bokach płaszczyznami: $x=0$, $y=0$, $x+y=1$ (równoległą do osi Oz oraz przecinającą pozostałe osie w punktach: $(1,0,0)$, $(0,1,0)$). Na rysunku 9b przedstawiono rzut obszaru V na płaszczyznę Oxy.



Rys. 9. Ilustracja do przykładu 5a

Traktując obszar V jako normalny względem płaszczyzny Oxy oraz patrząc na odpowiednie rysunki łatwo można ustalić granice zmienności współrzędnych dowolnego punktu $P(x,y,z)$ obszaru V:

$$V=\{(x,y,z)\colon 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1-x,\ 2-x-y\le z\le 3\}.$$

Objętość bryły V obliczamy korzystając ze wzoru (9):

$$|V|=\iiint\limits_V dxdydz=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x} dy\int\limits_{2-x-y}^{3} dz=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x}[z]_{2-x-y}^{3}\,dy=$$

$$=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x}(1+x+y)dy=\int\limits_0^1\left[y+xy+\frac{1}{2}y^2\right]_0^{1-x}dx=$$

$$=\int\limits_0^1\left[1-x+x(1-x)+\frac{1}{2}(1-x)^2\right]dx=$$

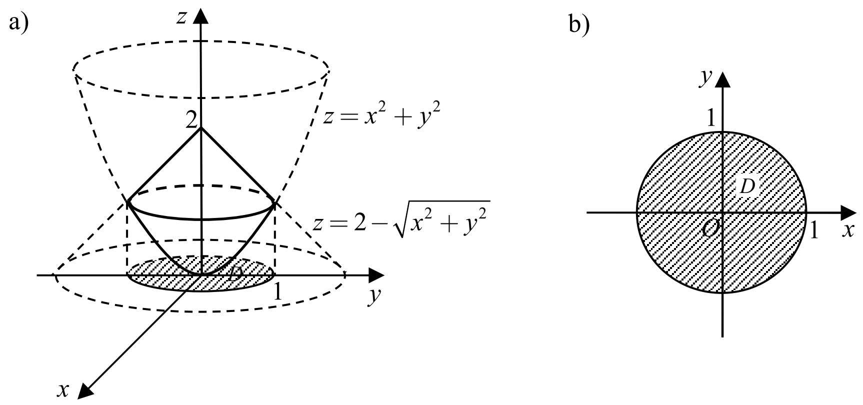
$$=\int\limits_0^1\left(1-x+x-x^2+\frac{1}{2}-x+\frac{1}{2}x^2\right)dx=\int\limits_0^1\left(-\frac{1}{2}x^2-x+\frac{3}{2}\right)dx=$$

$$=\left[-\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x\right]_0^1=-\frac{1}{6}-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=\frac{5}{6}.$$

b) Bryła V (rys. 10a) od dołu ograniczona jest paraboloidą $z=x^2+y^2$, a od góry stożkiem $z=2-\sqrt{x^2+y^2}$ (jego wykres można otrzymać odbijając symetrycznie względem płaszczyzny Oxy wykres stożka obrotowego $z=\sqrt{x^2+y^2}$, a następnie przesuwając go o dwie jednostki do góry).

W celu obliczenia objętości wprowadzamy współrzędne walcowe:

$$\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \\ z=z \end{cases}.$$



Rys. 10. Ilustracja do przykładu 5b

Korzystając z tych zależności wyznaczamy równania danych powierzchni we współrzędnych walcowych:

$$z = x^2 + y^2 = r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi = r^2$$

oraz

$$z = 2 - \sqrt{r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi} = 2 - r\,.$$

Zatem współrzędna walcowa z dowolnego punktu naszego obszaru będzie się zmieniała w przedziale:

$$r^2 \le z \le 2 - r\,.$$

Aby wyznaczyć obszar D (rys. 10b) będący rzutem bryły V na płaszczyznę Oxy, szukamy krawędzi przecięcia się danych powierzchni. W tym celu przyrównujemy prawe strony równań $z = r^2$, $z = 2 - r$ (rozwiązujemy układ równań) i otrzymujemy równanie kwadratowe $r^2 + r - 2 = 0$. Po jego rozwiązaniu i odrzuceniu rozwiązania ujemnego (ponieważ $r \ge 0$) uzyskujemy $r = 1$. Obszar D jest więc kołem o promieniu równym 1. Otrzymujemy zatem:

$$V' = \{(r, \varphi, z):\ 0 \le r \le 1,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ r^2 \le z \le 2 - r\}\,.$$

Obliczamy objętość obszaru V:

$$|V| = \iiint\limits_V dxdydz = \iiint\limits_{V'} r\,drd\varphi dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \int_{r^2}^{2-r} rdz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 [rz]_{r^2}^{2-r}\,dr =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left(2r - r^2 - r^3\right) dr = \int_0^{2\pi} \left[r^2 - \frac{1}{3} r^3 - \frac{1}{4} r^4 \right]_0^1 d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) d\varphi = \frac{5}{12} [\varphi]_0^{2\pi} = \frac{5}{6}\pi .$$

Opracowanie:
dr Igor Kierkosz
dr hab. Volodymyr Sushch